

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –**

**CLASA A IX-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Se scad relațiile $a_{n+1} = 2\sqrt{a_{n+1}a_n} - a_n + 1$ , și $a_n = 2\sqrt{a_na_{n-1}} - a_{n-1} + 1$ și se obține $a_{n+1} - a_{n-1} = 2\sqrt{a_n} \cdot (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_{n-1}})$ .....	1p
Rezultă $\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_{n-1}} = 2\sqrt{a_n}$ , deci șirul $(\sqrt{a_n})_{n \geq 0}$ e progresie aritmetică .....	2p
$\sqrt{a_0} = 0, \sqrt{a_1} = 1 \Rightarrow r = 1$ , deci $\sqrt{a_n} = a_0 + nr = n$ , adică $a_n = n^2, n \geq 0$ .....	1p
$\sqrt{1 + 4\sqrt{a_k a_{k-1}}} = \sqrt{1 + 4k \cdot (k-1)} = \sqrt{(2k-1)^2} = 2k-1$ .....	1p
$a_n = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2\sum_{k=1}^n k - n = n(n+1) - n = n^2$ .....	2p

**Subiectul 2.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $a = 3 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow E(a, b) = 3\sqrt{53} + 4\sqrt{47}$ .....	1p
$3\sqrt{53} < 22, 4\sqrt{47} < 28 \Rightarrow E(3,4) < 50$ .....	2p
b) Aplică inegalitatea CBS și obține: $(3\sqrt{15a+8} + 4\sqrt{10b+7})^2 \leq (3^2 + 4^2)(15a+8 + 10b+7)$ $\Rightarrow (E(a,b))^2 \leq 25 \cdot (15 + 5(3a+2b))$ $\Rightarrow E(a,b) \leq \sqrt{25(15+5 \cdot 17)} = 50$ .....	2p
Avem egalitate dacă $\frac{\sqrt{15a+8}}{3} = \frac{\sqrt{10b+7}}{4} \Leftrightarrow \frac{15a+8}{9} = \frac{10b+7}{16} = \frac{15a+8+10b+7}{25} = 4$ de unde rezultă $a = \frac{28}{15}$ și $b = \frac{57}{10}$ .....	2p

**Subiectul 3.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
$x - 1 < [x] \leq x, x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2 (\forall)x \in R$ .....	1p
Fie $x \in A_n \Rightarrow n \geq x^2 + [x] > x^2 + x - 1$ , de unde $n + 1 > x^2 + x \geq [x^2] + x$ deci $x \in B_{n+1}$ , adică $A_n \subset B_{n+1}$ .....	3p
Fie $x \in B_n \Rightarrow n \geq x + [x^2] > x + x^2 - 1$ , de unde $n + 1 > x^2 + x \geq x^2 + [x]$ deci $x \in A_{n+1}$ , adică $B_n \subset A_{n+1}$ .....	3p

**Subiectul 4.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v_2}$ . Atunci din $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (r - 1)\overrightarrow{v_1} + r \cdot \overrightarrow{v_2}$ .....	1p
Dacă O este mijlocul lui BE $\Rightarrow ABCO =$ romb, deci $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BO} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = 2 \cdot (\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$ .....	2p
Din $\Delta BCE \Rightarrow \overrightarrow{BN} = (1 - r)\overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BE} = -2r \cdot \overrightarrow{v_1} + (1 + r) \cdot \overrightarrow{v_2}$ .....	2p
$\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ vectori coliniari $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{BN} \Rightarrow \frac{r-1}{-2r} = \frac{r}{r+1}$ .....	1p
Obține $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .....	1p
Soluție alternativă: Punctele B, M, N sunt coliniare $\Leftrightarrow A[BMC] + A[CMN] = A[BCN]$	

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –**

**CLASA A X-A**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

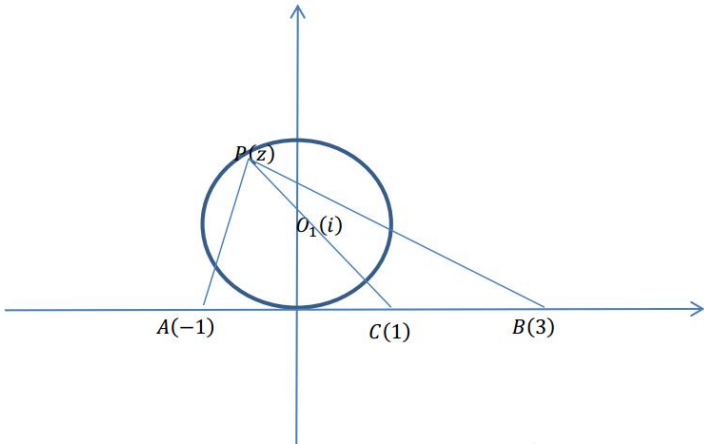
**Subiectul 1.**

<b>Detalii rezolvare</b>	<b>Barem asociat</b>
$\Rightarrow$ : Presupunem că $f(f(x)) = x$ , $(\forall) x \in [0, 1]$ (1). Atunci $f(x) = f^{-1}(x)$ și adunând cele două relații obținem că $f(f(x)) + f(x) = x + f^{-1}(x)$ .....	2p
$\Leftarrow$ : Presupunem $f(f(x)) + f(x) = x + f^{-1}(x)$ , $(\forall) x \in [0, 1]$ . Pentru $x \rightarrow f(x)$ obținem $f(f(f(x))) + f(f(x)) = f(x) + x$ , $(\forall) x \in [0, 1]$ . (2) .....	1p
Notăm $f(f(x)) = g(x)$ .....	1p
Relația (2) se scrie $f(g(x)) + g(x) = f(x) + x$ (3) .....	1p
Fie $h(x) = f(x) + x \Rightarrow h$ bijectivă (ca sumă de funcții bijective). Din (3) se obține că $h(g(x)) = h(x)$ .....	1p
și din injectivitate $\Rightarrow g(x) = x$ , adică $f(f(x)) = x$ , $(\forall) x \in [0, 1]$ . .....	1p

**Subiectul 2.**

<b>Detalii rezolvare</b>	<b>Barem asociat</b>
Din $a < x < b \Rightarrow (x - a) \cdot (x - b) < 0$ .....	1p
$x^2 - (a + b)x + ab < 0 \Rightarrow \log_y x^2 < \log_y [(a + b)x - ab]$ (pentru că $y > a > 1$ ) .....	2p
Analog $\log_x y^2 < \log_x [(a + b)y - ab]$ de unde prin înmulțire rezultă că $\log_y [(a + b)x - ab] \cdot \log_x [(a + b)y - ab] \geq \log_x y^2 \cdot \log_y x^2$ .....	2p
$\log_x y^2 \cdot \log_y x^2 = 4 \cdot \log_x y \cdot \log_y x = 4$ .....	1p
Egalitatea are loc pentru $x = y \in (a, b)$ .....	1p

**Subiectul 3.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
 <p>Din teorema medianei aplicăm în <math>\triangle PAB \Rightarrow PA^2 + PB^2 = 2PC^2 + \frac{1}{2} \cdot AB^2</math> .....</p> <p><math>PA^2 + PB^2 =  z + 1 ^2 +  z - 3 ^2</math> deci expresia este maximă atunci când PC este maxim ....</p> <p>PC este maxim dacă <math>O_1 \in (PC)</math> .....</p> <p><math>z = x + iy</math>, ecuația dreptei <math>O_1C</math> este <math>x + y = 1</math>. Rezultă sistemul <math>\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases}</math> și se obține <math>x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}</math> .....</p> <p>Atunci <math> z + 1 ^2 +  z - 3 ^2 \leq 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 + 8 = 14 + 4\sqrt{2}</math> .....</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

**Subiectul 4.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $a > 1$ funcția $f$ e strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare (funcția $-a^{-x}$ este strict crescătoare) .....	1p
iar dacă $a \in (0, 1)$ funcția $f$ este strict descrescătoare .....	1p
b) Fie $y \in \mathbb{R}$ . Atunci $f(x) = y \Rightarrow a^{2x} - y \cdot a^x - 1 = 0$ ecuație din care rezultă că $a^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} > 0$ .....	2p
$\Rightarrow x = \log_a \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ deci $f$ este surjectivă.....	1p
Atunci, conform a) funcția e bijectivă, deci inversabilă și inversa este $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = \log_a \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ .....	2p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –**

**CLASA A XI-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă:** Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

**Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $A = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}, x \neq 0 \Rightarrow A^2 = A$ .....	1p
Deci $A, B \in M \Rightarrow A^2 \cdot B^2 = AB = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-y & y-1 \\ 2-2y & 2y-1 \end{pmatrix}$ .....	1p
$\Rightarrow A^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2-xy & xy-1 \\ 2-2xy & 2xy-1 \end{pmatrix}, xy \neq 0 \Rightarrow A^2 \cdot B^2 \in M$ .....	2p
b) $A^2 = A \Rightarrow A^n = A, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ .....	1p
$A^{2015} = A = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} = -I_2$ .....	1p
$\begin{cases} 2-x = -1 \\ x-1 = 0 \end{cases}$ contradicție! deci nu există $A \in M$ cu proprietatea din enunț .....	1p

**Subiectul 2.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Monotonie: $u_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{7}{4}} = \frac{7}{2} > u_0$ .....	1p
Presupune $u_k > u_{k-1}, (\forall) k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$ . Atunci $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} - \sqrt{u_{n-1} - \frac{7}{4}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{u_n - \frac{7}{4}} + \sqrt{u_{n-1} - \frac{7}{4}}} > 0 \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0}$ strict crescător .....	2p
Mărginire : Presupune $u_k < 4, (\forall) k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} < \frac{5}{2} + \sqrt{4 - \frac{7}{4}} = 4$ deci $(u_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior de 4 .....	1p
Deduce că $(u_n)_{n \geq 0}$ este convergent și $u_n \rightarrow l > \frac{11}{4}$ .....	1p
Din relația de recurență rezultă $l = \frac{5}{2} + \sqrt{l - \frac{7}{4}}$ .....	1p
$\Rightarrow l^2 - 6 + 8 = 0 \Rightarrow l \in \{2, 4\}$ și pentru că $l > \frac{11}{4} \Rightarrow u_n \rightarrow 4$ .....	1p

**Subiectul 3.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $p(X) = \det(A + X \cdot B)$ .....	1p
$\Rightarrow P(X) = X^2 \cdot \det(B) + \alpha \cdot X + \det(A)$ .....	1p
$P(\sqrt{3}) = 3\det(B) + \alpha\sqrt{3} - 3 = 0$ (1) $\Rightarrow \alpha\sqrt{3} = 3 - 3\det(B)$ și cum $\alpha, \det(B) \in \mathbb{Q}$ rezultă că $\alpha = 0$ .....	1p
$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \det(B) = 1$ , deci $P(X) = X^2 - 3$ .....	1p
Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon^3 = 1$ .....	1p
$AB = BA \Rightarrow A^2 + B^2 - AB = (A + \varepsilon B) \cdot (A + \varepsilon^2 B)$ .....	1p
$\det(A^2 + B^2 - AB) = P(\varepsilon) \cdot P(\varepsilon^2) = (\varepsilon^2 - 3) \cdot (\varepsilon - 3) = 13$ .....	1p

**Subiectul 4.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3}$ . Dacă $\sqrt{a+2} \neq b \Rightarrow L \in \{-\infty, \infty\}$ .....	1p
Deci $b = \sqrt{a+2}$ rezultă că $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - \sqrt{a+2}}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + a} + \sqrt{a+2}} = \frac{1}{2\sqrt{a+2}} \cdot \frac{3}{4}$ .....	4p
$L = \frac{3}{16} \Rightarrow \sqrt{a+2} = 2 \Rightarrow a = 2$ .....	1p
$b = \sqrt{a+2} = 2$ .....	1p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –**

**CLASA A XII-A**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.**

**Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1.**

<b>Detalii rezolvare</b>	<b>Barem asociat</b>
$f$ continuă pe $[0, 2\pi] \Rightarrow f$ admite primitive pe $[0, 2\pi]$ .....	1p
Construim o primitivă a lui $f$ pe $[0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ . Fie $: J \rightarrow \mathbb{R}$ , unde $J \subset [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ interval, $G$ o primitivă a lui $f$ . $t = tg \frac{x}{2} \Rightarrow I = \int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$ . Rezultă $G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}, x \in J$ .....	3p
Atunci $: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , $F(x) = \begin{cases} G(x), x \in [0, \pi) \\ c_1, x = \pi \\ G(x) + c_2, x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ e o primitivă a lui $f$ pe $[0, 2\pi]$ .....	1p
$F$ continuă în $x = \pi \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x) = F(\pi)$ , deci $c_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, c_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ .....	1p
Deci $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}, x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ și $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx = F(x) + C, x \in [0, 2\pi]$ .....	1p

**Subiectul 2.**

<b>Detalii rezolvare</b>	<b>Barem asociat</b>
Din ipoteză $\Rightarrow f' + 3g' = 2f - g$ și $5f' - 6g' = 10f + 2g$ .....	1p
Se obține $f'(x) = 2f(x)$ .....	1p
adică $(f(x) \cdot e^{-2x})' = 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$ .....	1p
$\Rightarrow f(x) = c_1 \cdot e^{2x}, c_1 \in \mathbb{R}$ constantă arbitrară .....	1p
Tot din ipoteză deducem că $-3g'(x) = g(x)$ .....	1p
care se scrie $(g(x) \cdot e^{\frac{x}{3}})' = 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$ .....	1p
$\Rightarrow g(x) = c_2 \cdot e^{-\frac{x}{3}}, c_2 \in \mathbb{R}$ constantă arbitrară .....	1p

**Subiectul 3.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $e \in \mathbb{R}$ element neutru $\Rightarrow f(f^{-1}(a) + f^{-1}(e) - q) = a, (\forall) a \in \mathbb{R}$ .....	1p
Se compune cu $f^{-1}$ și rezultă $f^{-1}(e) = q \Rightarrow e = f(q) = 2$ .....	1p
Fie $a'$ simetricul lui $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(f^{-1}(a) + f^{-1}(a') - q) = 2 = f(q)$ și din injectivitate Avem $f^{-1}(a) + f^{-1}(a') - q = q$ , deci $a' = f(2q - f^{-1}(a))$ .....	2p
b) $f(x) = x^3 \Rightarrow a * b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - q)^3$ .....	1p
Ecuția se scrie $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6$ .....	1p
Mulțimea soluțiilor este $S = \{-27, 8\}$ .....	1p

**Subiectul 4.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $(f_a \circ f_b)(x, y) = f_a\left(x + by + \frac{b^2}{2}, y + b\right) = f_{a+b}(x, y)$ .....	1p
Asociativitatea .....	1p
Element neutru $f_0(x, y) = (x, y)$ .....	1p
Simetricul unui element $f_a^{-1}(x, y) = f_{-a}(x, y) = \left(x - ay + \frac{a^2}{2}, y - a\right)$ .....	1p
b) Fie $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(f_a) = a, a \in \mathbb{R}$ .....	1p
Atunci $\varphi(f_a \circ f_b) = \varphi(f_{a+b}) = a + b = \varphi(f_a) + \varphi(f_b) \Rightarrow \varphi$ morfism.....	1p
$\varphi(f_a) = \varphi(f_b) \Rightarrow a = b \Rightarrow x + ay + \frac{a^2}{2} = x + by + \frac{b^2}{2}$ și $y + a = y + b$ . Rezultă că $f_a(x, y) = f_b(x, y) \Rightarrow \varphi$ injectivă $(\forall) a \in \mathbb{R}, (\exists) f_a \in G$ astfel încât $\varphi(f_a) = a$ $\Rightarrow \varphi$ surjectivă .....	1p